Exercice 1:

1. $\dfrac{x^5-x}{x^2-1}=\dfrac{x^5(1-\frac{1}{x^4})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}=x^3\times\dfrac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. Par somme puis quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5-x}{x^2-1}=+\infty$.
2. Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty-(+\infty)$ où les deux termes tendent vers $+\infty$ avec la même vitesse. Aucune mise en facteur ne conviendra. On multiplie par la partie conjuguée.
   $\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}\times\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}=+\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1})=0$.
3. On applique la même méthode.
   $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})=2$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=1$.
4. On utilise l'écriture sous forme exponentielle : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ x^x=\mathbf{e}^{x\ln(x)}$.
   $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$ et $\mathbf{e}^0=1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$.
5. $\dfrac{\sin(2x)}{5x}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{\sin(2x)}{2x}$. Or, $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin(X)}{X}=1$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{2x}=1$.
   Par produit, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{5x}=\dfrac{2}{5}$.
6. On va utiliser un encadrement de sin. $\forall x>0,\ 0\leqslant|\sin(x)|\leqslant1\Rightarrow 0\leqslant\left|\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{x}{x^2+1}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}=0$.
7. On encadre de nouveau. $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant|\cos(5x)|\leqslant1\Rightarrow0\leqslant|\cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}|\leqslant\mathbf{e}^{-3x}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{-3x}=0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}=0$.
8. $\forall x\in\mathbb{R},\ x-1\leqslant x-\sin(x)\Rightarrow\mathbf{e}^{x-1}\leqslant\mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ par croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{x-1}=+\infty$. Par minoration, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{x-\sin(x)}=+\infty$

Exercice 2: Notons ℓ la limite de f : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$. Notons T une période de f.
Soit $x\in\mathbb{R}$. $\forall n\in\mathbb{N},\ f(x+nT)=f(x)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+nT)=f(x)$ (suite constante).
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x+nT)=+\infty$ donc puisque f admet une limite en $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+nT)=\ell$

Par unicité de la limite, $f(x)=\ell$ et la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: *Limites et parties entières*

1. On va utiliser la caractérisation de la partie entière : $\forall x\in\mathbb{R},\ x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$.
   Pour $x>0$, cela donne $x(x-1)<x\lfloor x\rfloor\leqslant x^2$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}x(x-1)=+\infty$.
   Par minoration, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\lfloor x\rfloor=+\infty$.

   Pour $x<0$, cela donne $x(x-1)>x\lfloor x\rfloor\geqslant x^2$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.
   Par minoration, $\lim\limits_{x\to-\infty}x\lfloor x\rfloor=+\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} 1 - x = 1$.

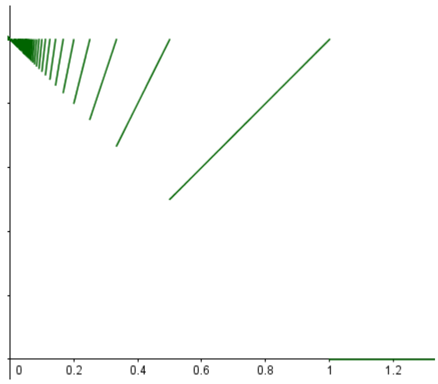
   Par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

   Soit $x > 1$. $0 \leqslant \dfrac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Donc, la fonction f est nulle sur $]1; +\infty[$. D'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

   Il nous reste à faire l'étude sur $]0, 1]$. On étudie les valeurs prises par $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ pour $x \in]0, 1]$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in]0, 1], \quad \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k \iff k \leqslant \frac{1}{x} < k + 1 \iff \frac{1}{k} \geqslant x > \frac{1}{k+1}$$

   Par conséquent, pour tout $x \in \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right]$, $f(x) = kx$



Exercice 4: *Limites et fonction sinus*

1. Nous allons proposer deux familles de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que $(\sin(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tendent pas vers la même limite.

   Prenons $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2\pi n$ et $y_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(x_n) = 0$ et $\sin(y_n) = 1$.
   Or, si la fonction sinus admet une limite en $+\infty$, les deux suites $(\sin(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ devraient tendre vers cette limite. Donc, sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. On fait de même en prenant les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.

3. Il faut montrer que la fonction f a une limite finie en 0. On prendra cette valeur pour définir le prolongement.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant 1 \Rightarrow \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x|.$$

   Par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Exercice 5:

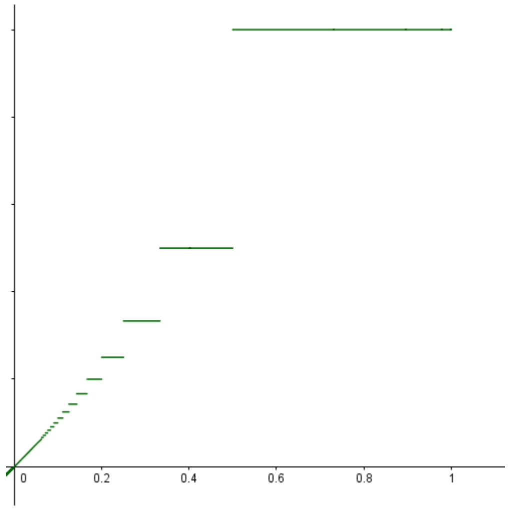
1. Par opération sur les limites (composée et quotient), $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} = 0$.

   Or, $g(0) = 0$ donc g est continue en 0.

2. Pour tracer le graphe de g, on étudie les valeurs prises par $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ pour $x \in]0, 1]$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in]0, 1], \quad \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k \iff k \leqslant \frac{1}{x} < k + 1 \iff \frac{1}{k} \geqslant x > \frac{1}{k+1}$$

   Par conséquent, pour tout $x \in \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right]$, $g(x) = \frac{1}{k}$



Exercice 6:

1. On introduit les deux suites suivantes:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \text{ et } y_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

   On a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 1$. Pourtant, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = 0$. Donc, f n'admet pas de limite en 1 et donc n'est pas continue en 1.

2. La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par produit et somme, la fonction g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
   Soit $p \in \mathbb{Z}$. La fonction partie entière est continue à droite en p donc la fonction g est continue à droite en p. Il reste à étudier la limite à gauche.
   Soit $x \in \left[p - \dfrac{1}{2}; p \right[$. $g(x) = p - 1 + (x - p + 1)^2 \underset{x \to p}{\longrightarrow} p$.
   Or, $g(p) = p$ donc g est continue à gauche en p. Finalement, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On va utiliser l'écriture exponentielle de la fonction h.

$$\forall x \in [1; +\infty[, \ h(x) = \frac{\exp(\lfloor x \rfloor \ln(x))}{\exp(x \ln(\lfloor x \rfloor))}$$

   Les fonctions ln, exp et partie entière sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc la fonction h est continue sur $[1; +\infty[\setminus \mathbb{Z}$.
   Les fonctions ln, exp et partie entière sont continues à droite donc la fonction h est continue à droite.

   Soit $p \in [\![2; +\infty[\![$. $h(p) = 1$.
   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{x \to p^-} h(x) = \dfrac{\exp((p-1)\ln(p))}{\exp(p \ln(p-1))} = \dfrac{p^{p-1}}{(p-1)^p}$.

$$h \text{ est continue en } p \Leftrightarrow \frac{p^{p-1}}{(p-1)^p} = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(p)}{p} = \frac{\ln(p-1)}{p-1}.$$

Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est une bijection sur $[\mathbf{e}; +\infty[$. Donc, la fonction h n'est pas continue en p.

Exercice 7:

1. On va le démontrer par récurrence en posant $P(n)$:"$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$."
   Initialisation: Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^0}\right) = f(x) = f\left(\dfrac{x}{1}\right) = f(x)$. La propriété est vraie au rang 0.
   Hérédité: Supposons qu'il existe un rang n tel que $P(n)$ soit vraie.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. $f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{2^n}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ par hypothèse dé récurrence appliquée à $\dfrac{x}{2}$.
   Or, $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right) = f(x)$ par hypothèse sur f donc on a bien $f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la suite $(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right))_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est une suite constante égale à $f(x)$ par la question précédente.
   De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et la fonction f est continue en 0. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$.

   Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Ceci est vrai pour tous les réels donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8:

1. On va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie sur $[a, b]$ par $g : x \to f(x) - x$.
   Cette fonction est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues.
   $g(a) = f(a) - a$. Or, f est à valeurs dans $[a, b]$ donc $f(a) \geqslant a$ donc $g(a) \geqslant 0$.
   $g(b) = f(b) - b$. Or, f est à valeurs dans $[a, b]$ donc $f(b) \leqslant b$ donc $g(b) \leqslant 0$.
   On a donc $g(b) \leqslant 0 \leqslant g(a)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, : $\exists c \in [a, b],\ g(c) = 0$ i.e. $\exists c \in [a, b],\ f(c) = c$.

2. On étudie de nouveau la fonction g.
   Supposons que g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par continuité, elle est de signe constant. Supposons $g > 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   C'est absurde puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc $\exists c \in \mathbb{R},\ f(c) = c$.
   On va montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow g(x) - g(y) = f(x) - x - f(y) + y = \underbrace{f(x) - f(y)}_{\geqslant 0} + \underbrace{y - x}_{>0} > 0$$

   Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, elle est injective et 0 admet donc un unique antécédent : $\exists\, !c \in \mathbb{R},\ f(c) = c$.

Exercice 9: On a l'intuition de ce qui se passe : la fonction passe de valeurs proches de 1 à des valeurs proches de -1 tout en étant continue. Elle croise donc l'axe des abscisses.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 : \forall \varepsilon > 0,\ \exists A < 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant 1 + \varepsilon$.
En prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $\exists A < 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant A \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 : \forall\varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant B \Rightarrow |f(x)+1| \leqslant \varepsilon \Rightarrow -1-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant -1+\varepsilon.$
En prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2},\ \ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant \dfrac{-1}{2}.$

On a donc $f(B) \leqslant \dfrac{-1}{2}$ et $f(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$. Or f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [A;B]$ tel que $f(c) = 0$. Donc f s'annule sur $[A;B]$, donc sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> <u>10</u>: Notons T une période de f.
La fonction f est continue sur le segment $[0,T]$ donc elle y est bornée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,T],\ |f(x)| \leqslant M$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $n = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$, on a $n \leqslant \frac{x}{T} < n+1 \Rightarrow nT \leqslant x < (n+1)T \Rightarrow 0 \leqslant x - nT < T$.
Or, $f(x) = f(x-nT)$ par périodicité de f. Donc, $|f(x)| = |f(x-nT)| \leqslant M$ car $x - nT \in [0,T]$.

On a montré : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M$. Donc, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> <u>11</u>: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty : \forall M > 0,\ \exists A < 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M.$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty : \forall N > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant N.$

Prenons $M = N = f(0)+1$. $\forall x \in]-\infty; A] \cup [B; +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0)+1$.

On va étudier f sur $[A;B]$. La fonction f est continue sur ce segment donc la fonction f est bornée sur $[A;B]$ et y atteint ses bornes : $\exists (C,D) \in [A,B]^2$ tels que $f([A;B]) = [f(C), f(D)]$.
$\forall x \in [A;B],\ f(x) \geqslant f(C)$. De plus, $0 \in [A;B]$ donc $f(0) \geqslant f(C)$.

En résumé : $\forall x \in]-\infty; A] \cup [B; +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0)+1 \geqslant f(C)$ et $\forall x \in [A;B],\ f(x) \geqslant f(C)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f(C)$.
La fonction f admet un minimum global en C.

<u>Exercice</u> <u>12</u>:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)+f(x)-g(x)) = f(x)$.
   Si $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))) = g(x)$.
   On a donc bien l'égalité souhaitée.

2. La fonction $f-g$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions continues.
   La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $|f-g|$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
   Enfin, la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> <u>13</u>:

1. Soit $a \in I$. On va repasser par la définition avec les quantificateurs de la continuité en a.
   Soit $\varepsilon > 0$. Notons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$. On a alors
   $$\forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant k.|x-a| \leqslant \varepsilon$$
   Donc, on a bien que f est continue en a, donc sur I.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction k-lipschitzienne avec $k \in]0,1[$.

   (a) **Existence :**
   On va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.

- La fonction f est positive donc $g(0) \geqslant 0$.
- Si on applique la définition de lipschiztienne avec $y = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x) - f(0)| \leqslant k|x| \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant f(0) + kx \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leqslant f(0) + (k-1)x \end{aligned}$$

Par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
Donc, $\exists A > 0$ tel que $g(A) < 0$. Par le TVI, il existe $c \in [0; A]$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) = c$.

Unicité : On suppose qu'il existe deux points fixes c_1 et c_2. On applique la définition de lipschiztienne avec $x = c_1$ et $y = c_2$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(c_1) - f(c_2)| \leqslant k|c_1 - c_2| \\ |c_1 - c_2| \leqslant k|c_1 - c_2| \end{aligned}$$

Or, $k < 1$ donc $c_1 = c_2$, d'où l'unicité du point fixe.

(b) Toujours par la définition de lipschitzienne, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - c| = |f(u_{n-1}) - f(c)| \leqslant k|u_{n-1} - c| \leqslant \ldots \leqslant k^n|u_0 - c|$$

Or, $k \in [0; 1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - c| = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = c$.

<u>Exercice</u> <u>14</u>:

1. Analyse : Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$ d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.
Par conséquent $f(\mathbb{R})$ est inclus dans $\{0, 1\}$. Or f est continue, donc l'image d'un intervalle est un intervalle.
Par conséquent, $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ ou $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ i.e. f est constante à 0 ou 1.
Synthèse : les fonctions constantes à 0 et 1 sont bien solutions du problème.

2. Analyse : Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) + f(x) = 0$. En prenant $x = 0$, on trouve $f(0) = 0$.
On peut ensuite montrer par récurrence immédiate que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{4^n}\right)$.
On passe ensuite à la limite et la continuité de f nous permet d'obtenir $f(x) = f(0) = 0$.
Synthèse : la fonction constante à 0 est solution du problème posé.

<u>Exercice</u> <u>15</u>:

1. On va montrer que la fonction f est une fonction continue et strictement monotone sur $]0; 1[$.

   (a) **Continuité:** La fonction f est la somme de deux fonctions continue sur $]0; 1[$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

   (b) **Stricte monotonie:** La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[,\ f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 1}{(x(x-1))^2}$.
   Ce trinôme n'a pas de racines réelles donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; 1[$.

   La fonction f est donc une bijection sur $]0; 1[$ à valeurs dans $f(]0; 1[) =]\lim\limits_{x \to 1^-} f(x); \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)] =]-\infty; +\infty[$.
   L'expression de f^{-1} est dure à déterminer.

2. On n'a pas besoin de l'expression de f^{-1} pour déterminer la limite, seulement de la continuité de f^{-1}. Or, la fonction f est continue sur $]0; 1[$ donc la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $\lim\limits_{y \to 0} f^{-1}(y) = f^{-1}(0)$. Par composition de limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0)$.
On résout l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0;1[$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}$.